

Математика: Визначений інтеграл

Тема: Обчислення площ плоских фігур

Рівень мови: А2 (Підготовчий факультет)

Що ми вивчимо сьогодні?



Поняття

Що таке первісна та невизначений інтеграл.



Формула

Як працює формула Ньютона-Лейбніца.



Геометрія

Як знайти площу фігури під графіком.

1. Первісна функція (F)

Первісна — це "батько" нашої функції.

Якщо ми знайдемо похідну від **F(x)**, ми отримаємо **f(x)**.

$$F'(x) = f(x)$$

Сукупність усіх первісних називається **невизначеним інтегралом**.

Приклад:

$$f(x) = x^2$$



$$F(x) = x^3/3 + C$$

Основні формули для пам'яті

Функція $f(x)$	Первісна $F(x)$	Приклад
k (число)	$kx + C$	$5 \rightarrow 5x + C$
x^n	$x^{n+1} / (n+1) + C$	$x^2 \rightarrow x^3/3 + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\sin x \rightarrow -\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\cos x \rightarrow \sin x + C$

2. Визначений інтеграл

Це число, яке ми отримуємо на відрізку від **a** до **b**.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

a — нижня межа

b — верхня межа

F(b) - F(a) — формула Ньютона-Лейбніца

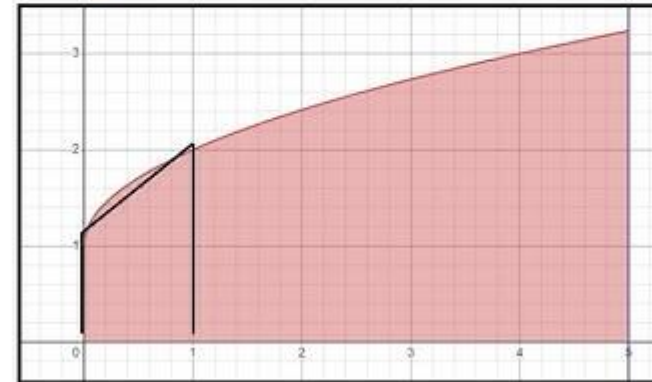
3. Що ми шукаємо? Площу!

Фігура під графіком функції називається **криволінійною трапецією**.

Межі **[a; b]** — це вертикальні лінії зліва і справа.

Інтеграл обчислює **площу (S)** цієї фігури.

Area Under a Curve Conceptual Introduction



(C) On Teaching Math

Алгоритм дій: Як знайти площу?

1

Напишіть інтеграл з
межами **a** та **b**.

2

Знайдіть первісну
функцію **F(x)**.

3

Підставте спочатку **b**,
потім **a**.

4

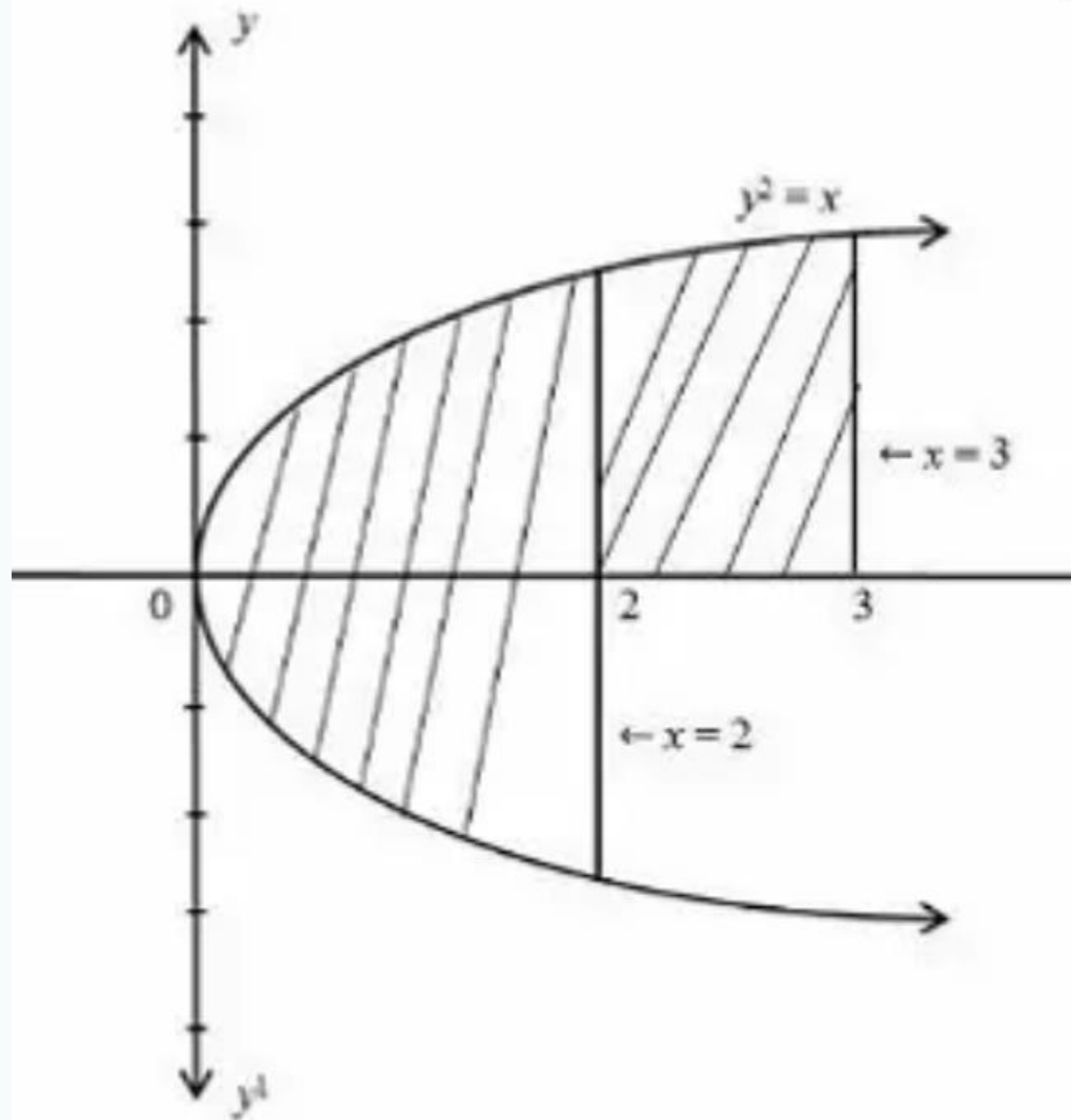
Відніміть:
 $F(b) - F(a)$.

Приклад №1

Знайти площу фігури, обмеженої лініями:
 $y = x^2$, $x = 2$, $x = 3$, $y = 0$.

$$S = \int_2^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_2^3$$
$$= (33/3) - (23/3) = 9 - 8/3 = \mathbf{19/3}$$

Результат: **6.33 кв. одиниць**.



Приклад №2: $(x + 1)^2$

Розв'яжемо інтеграл на відрізку **[-1; 2]**:

$$\int_{-1}^2 (x + 1)^2 dx$$

1. Розкриваємо дужки: $x^2 + 2x + 1$
2. Знаходимо первісну: $x^3/3 + x^2 + x$
3. Підставляємо значення: **Результат = 9**



Порада: Завжди перевіряйте знаки (+/-) при підстановці від'ємних чисел!

4. Коли ліній дві?

Якщо фігура знаходиться між $f(x)$ та $g(x)$:

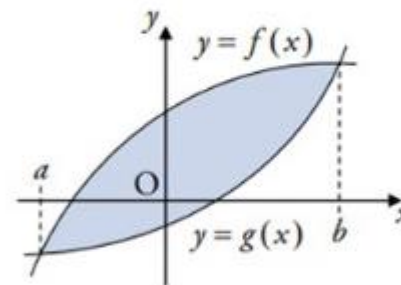
$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Ми віднімаємо нижню функцію від верхньої.

The area between two curves between $x = a$ and $x = b$ is calculated as:

$$\int_a^b (\text{upper curve} - \text{lower curve}) dx \text{ square units.}$$

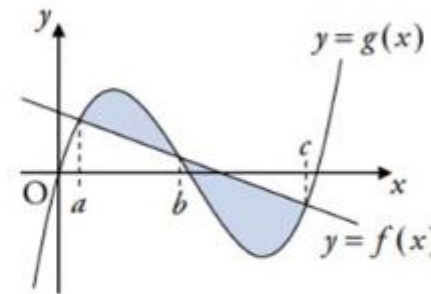
So for the shaded area shown below:



The area is $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ square units.

When dealing with areas between curves, areas above and below the x-axis do not need to be calculated separately.

However, care must be taken with more complicated curves, as these may give rise to more than one closed area. These areas must be evaluated separately. For example:



In this case we apply $\int_a^b (\text{upper curve} - \text{lower curve}) dx$ to each area.

So the shaded area is given by:

$$\int_a^b (g(x) - f(x)) dx + \int_b^c (f(x) - g(x)) dx.$$

Математичний словник (A2)

Межа
(Limit / Boundary)

Відрізок
(Interval / Segment)

Обчислити
(To calculate)

Різниця
(Difference [-])

Значення
(Value)

Площа
(Area)

Дякую за увагу!

Чи є у вас запитання?

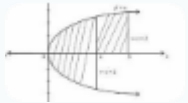
Домашнє завдання: Обчисліть площу під $y = \sin(x)$ на $[0;$
 $\pi]$

Image Sources



https://i.ytimg.com/vi/Jjaaq3M51HI/hq720.jpg?sqp=-oaymwEhCK4FEIIDSFryq4qpAxMIARUAAAAAGAEIAADIQj0AgKJD&rs=AOn4CLDmBfIZdj_69VpB_52WB2zlc6jNfw

Source: www.youtube.com



<https://balti.afterboards.in/OwkXae9o8YL4aIn>

Source: www.afterboards.in



<https://www.highermathematics.co.uk/wp-content/uploads/2023/06/Picture3.jpg>

Source: www.highermathematics.co.uk



<https://media.istockphoto.com/id/1438461375/vector/math-science-formulas-on-a-green-blackboard-background-vector.jpg?s=612x612&w=0&k=20&c=4f7pT5AyHIBDkU2L5zGepmxDeRN-bQQOoUEy14reRjl=>

Source: www.istockphoto.com